

Параллельный алгоритм численного решения двухслойной модели мелкой воды в двумерном случае.

М.И. Габдуллина

МГУ имени М.В. Ломоносова

В статье рассматривается двухслойная модель мелкой воды и численное решение уравнений мелкой воды в двумерном случае конечно-разностным методом Лакса-Вендроффа. Описывается параллельный алгоритм численного решения с использованием MPI и гибридной модели MPI/OpenMP. Приводятся результаты вычислений для однослойного случая для равномерных прямоугольных сеток и исследования эффективности на системе IBM Blue Gene/P, так же проводится сравнения MPI и MPI/OpenMP реализации.

Ключевые слова: мелкая вода, двухслойная модель, MPI/OpenMP, численное решение, параллельный алгоритм.

1. Введение

Уравнения мелкой воды – система нелинейных гиперболических уравнений, которую можно получить аппроксимируя полную систему уравнений Эйлера, описывающую течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести при пренебрежении эффектами вертикальной неоднородности горизонтального поля скорости. Впервые были получены Сен-Венаном в работе [1], так же достаточно подробный вывод уравнений можно найти в [2].

Важным применением уравнений мелкой воды является моделирование океанических течений, поскольку океан имеет протяженность намного большую, чем его глубина. В работе [3] приведены результаты моделирования крупномасштабных течений на всём земном шаре, учитывающие влияние приливных сил. В работе [4] приближение мелкой воды было использовано для моделирования распространения цунами.

Если жидкость расслаивается по причине разной солености, то полученный в результате слоистый поток очень похож на течение мелкой воды. Пример использования многослойной модели мелкой воды приведён в работе [5].

В работе [6] приводятся некоторые возможные численные схемы решения системы уравнений и проводится исследование этих методов.

Так же при моделировании жидкостей на поверхности воды важным является рассмотрение сферической модели. В работе [7] получена система законов сохранения полного импульса и массы для мелкой воды на вращающейся притягивающейся сфере.

Нелинейный характер уравнений мелкой воды означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. Гиперболичность уравнений мелкой воды определяет, кроме гладких, наличие и разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью за конечное время может привести к разрывному решению. В работе [8] найдены точные решения для одномерного случая.

Так же существует и многослойные модели описания мелкой воды. Эти уравнения описывают два перемешивающихся слоя невязкой несжимаемой жидкости. Преимуществом такого подхода считается возможность непосредственно учитывать взаимное влияние слоев друг на друга. Двухслойная модель описывает течения как на поверхности водоема, содержащего глубоководные и мелководные районы, так и на всех горизонтах до самого дна.

В работе [9] выведены и проанализированы три дифференциальные модели двухслойной мелкой воды.

Для нахождения численного решения однослойной модели существуют некоторые параллельные реализации, например в работе [10] описано исследование алгоритма, написанного для SMP систем с малым количеством процессоров. В работе [11] проведено исследование эффективности нескольких параллельных реализаций алгоритма численного решения начально-краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI, рассмотрены две схемы реализации двухточечных обменов. В работе [12] предложен и протестирован программный алгоритм ускорения счета системы уравнений мелкой воды на параллельных компьютерах с распределенной памятью. Алгоритм базируется на оптимизации объема вычислений, межпроцессорных обменов и количества пересылаемой информации.

2. Постановка задачи

2.1. Однослойная модель

Система уравнений мелкой воды в двумерной области выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h + \frac{1}{2}gh^2}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h + \frac{1}{2}gh^2}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Где h – высота слоя в точке, u – компонента скорости в направлении x , v – компонента скорости в направлении y . Граничные условия включают в себя отсутствие потоков жидкости через границу и отражение волны от границы, то есть производная по нормали на границе L равна нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \bar{n}}|_L = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_L = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{n}}|_L = 0. \end{cases} \quad (2)$$

2.2. Двухслойная модель

Представим слой жидкости глубины h как два влияющих друг на друга слоя $h = h_1 + h_2$. Влияние верхнего слоя на нижний определяется создаваемым им дополнительным давлением ρgh_2 . Влияние же нижнего слоя на верхний целиком определится значением высоты нижнего слоя h_1 , представляющим собой для верхнего слоя профиль подстилающей поверхности. С учетом этого, система уравнений мелкой воды в двухслойном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1^2 h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_1 v_1 h_1)}{\partial y} + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 v_1 h_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1^2 h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2)}{\partial y} + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_2^2 h_2 + \frac{1}{2}gh_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 v_2 h_2)}{\partial y} + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 v_2 h_2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2^2 h_2 + \frac{1}{2}gh_2^2)}{\partial y} + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

3. Численная схема

3.1. Метод Лакса-Вендроффа

Систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U(H)}{\partial x} + \frac{\partial V(H)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$(5)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно решать методом Лакса-Вендроффа, метод является двухшаговым по времени, первый шаг:

$$H_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(H_{i+1,j}^n + H_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n) \quad (7)$$

$$H_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(H_{i,j+1}^n + H_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}(V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n). \quad (8)$$

Второй шаг:

$$H_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (9)$$

U и V зависят от H и вычисляются соответствующим образом.

3.2. Аппроксимация граничных условий

Граничные условия (2) для двумерной прямоугольной области в дискретном виде:

$$H_{i,0} = H_{i,1}, H_{i,N} = H_{i,N-1}, H_{0,j} = H_{1,j}, H_{N,j} = H_{N-1,j},$$

$$U_{i,0} = U_{i,1}, U_{i,N} = U_{i,N-1}, U_{0,j} = -U_{1,j}, U_{N,j} = -U_{N-1,j},$$

$$V_{i,0} = -V_{i,1}, -V_{i,N} = -V_{i,N-1}, V_{0,j} = V_{1,j}, V_{N,j} = V_{N-1,j}.$$

4. Корректность алгоритма

С использованием вышеописанного метода для однослойной модели была разработана программа на языке C++, для тестирования программы были проведены расчёты на сетках различного размера, для проверки корректности работы алгоритма был использован метод сгущающихся сеток. График максимальной разницы на между значениями в соответствующих узлах сеток двух последующих итераций представлен на рис. 1.

Так же схема была численно проверена на консервативность: максимальная разница сумм элементов массива высот для каждого временного слоя $\Delta = 4.3 * 10^{-8}$ для размера сетки $N = 1000$.

На рис. 2 приведён пример изменения слоя воды, на расчётной сетке размера $N = 1000$, начальное условие – гауссовский импульс в центре области.

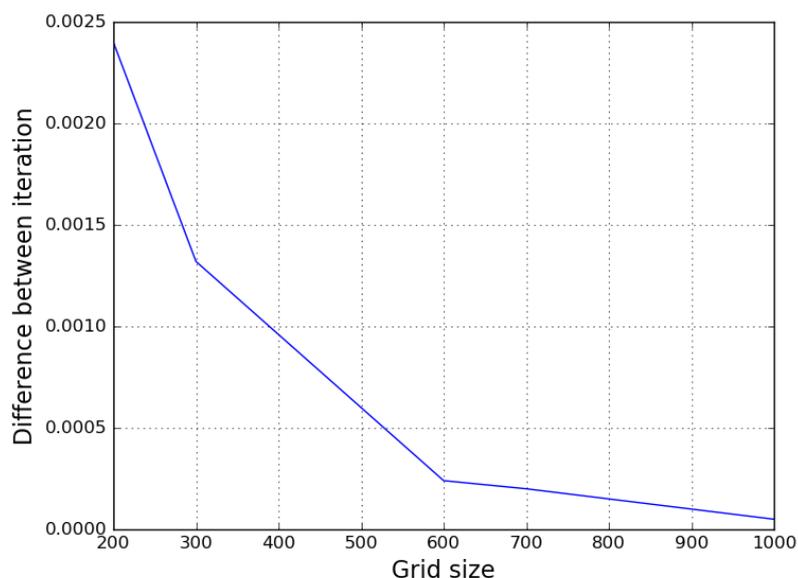


Рис. 1. Разница между итерациями для различного размера сетки

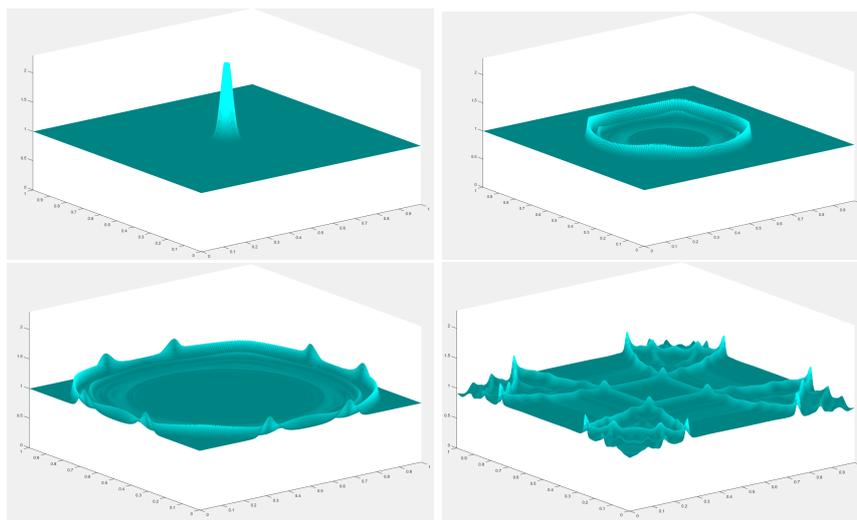


Рис. 2. Изменение слоя воды с течением времени

5. Параллельный алгоритм

При расчетной сетке размера $N \times N$, где $N = 2^q$ и числе процессоров $p = 2^n$ расчетная сетка разбивается на прямоугольный домены.

Поскольку схема явная, для расчетов требуется значения из приграничных ячеек соседних процессоров. Пересылки можно организовать с помощью блокирующих функций совмещенных приема-передачи MPI_Sendrecv. Сначала все процессы, кроме последнего, отправляют данные своим правым соседям и от них же ожидают поступления данных. Затем все процессы, кроме первого, посылают данные своим левым соседям и ожидают поступления данных от них же. Аналогичная схема происходит для верхних и нижних соседей.

В виду того, что внутри каждого MPI-процесса, запущенного на узле, вычисления происходят последовательно во вложенном цикле, то, если процессоры содержат несколько вычислительных ядер, можно использовать дополнительные OpenMP нити. Узлы вычис-

лительной системы IBM BlueGene/P имеют четырехядерные мультипроцессоры.

```

void selectionsort(ap::real_1d_array& arr, const int& n)
{ #pragma omp parallel for private(i)
  for (j=1;j<J;j++) {
    for (i=1;i<I;i++) {
      ...
    }
  }
}
    
```

Рис. 3. Пример использования OpenMP внутри MPI-процесса

5.1. Результаты

Исследование производительности программы было проведено на вычислительной системе IBM BlueGene/P. Сетка равномерная и прямоугольная, размер – 2048 × 2048. На рис. 1 приведены графики эффективности, на одном графике сравниваются две реализации – MPI и MPI/OpenMP, сравнение производится по одинаковому числу ядер. Так как в узлах IBM BlueGene/P расположены четырехядерные процессоры, то на каждом узле генерировалось 4 нити.

Невысокая эффективность объясняется использованием блокирующих операций, что так же объясняет падение эффективности при увеличении числа процессоров. для увеличения эффективности планируется улучшить алгоритм заменой блокирующих операций на асинхронные и использованием перекрытий. Таким образом, использование MPI/OpenMP позволяет более эффективно использовать узлы в сравнении с MPI реализацией.

Главной целью дальнейшего исследования является разработка параллельного алгоритма для двухслойной модели мелкой воды.

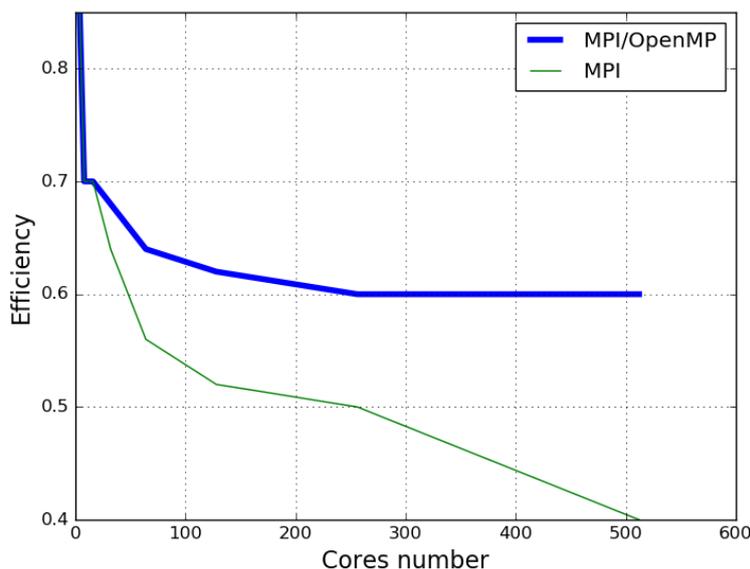


Рис. 4. Эффективность

Литература

1. Saint-Venant A.J.B. Theorie du Mouvement non permanent des Eaux // Institut de France, Acad. des Sci. de Paris. 1871. 73 (3) 147; 73 (4) 237.
 2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
 3. Hendershott M.C. Long waves and ocean tides. Ch. 10 // Evolution of Physical Oceanography: Scientific Surveys in Honor of Henry Stommel / Eds. B.A. Warren, C. Wunsch. Cambridge: MIT Press, 1981. P. 292–341.
 4. Shokin Y.I., Chubarov L.B. Finite-difference simulation of tsunami propagation // Theoretical and experimental fluid mechanics / Eds. U. Muller et al. Berlin: Springer, 1980. P. 599–606.
 5. Карабут П. Е., Остапенко В. В. Задача о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде (линейное приближение) // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 72, вып. 6. С. 958–970.
 6. Чикин А.Л., Крукиер Л.А. Численное исследование поведения некоторых разностных схем при решении уравнений мелкой воды. // Вычислительные технологии, Новосибирск. 1995. т. 4, №10, с. 300 – 311.
 7. Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, №2. С. 37-45.
 8. Han E., Warnecke G. The Exact Riemann solutions to shallow water equations. / URL: <http://www.math.ntnu.no/conservation/2012/012.pdf>.
 9. Овсянников Л. В. Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
 10. Stanislav Brand Parallel algorithm for numerical solution of the shallow water equation // Proceedings of the Czech–Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 Czech Technical University in Prague, September 14-17, 2006 pp. 25–36.
 11. Е.Д. Кареева, В. В. Шайдуров Параллельная реализация метода конечных элементов для начально-краевой задачи мелкой воды // Вычислительные технологии Том 14, № 6, 2009.
 12. В.В. Калмыков, Р.А. Ибраев Алгоритм с перекрытиями для решения системы уравнений мелкой воды на параллельных компьютерах с распределенной памятью // УГТУ, 2013 Т. 17, № 5 (58). С. 252–259.
-

Parallel algorithm for numerical solution of the two-layer shallow water model in 2D

M.I. Gabdullina

Lomonosov Moscow State University

This article deals with parallelization of the program for numerical solving the two-layer shallow water equation in 2D. The equations are solved by finite difference methods within the Lax-Wendroff scheme. The algorithm is parallelized using MPI and mixed MPI/OpenMP mode. The calculations are made for one-layer case on different sizes of uniform rectangular grid. The efficiency measurement is made on IBM Blue Gene/P system. MPI and mixed MPI/OpenMP realization are compared.

Keywords: shallow water, two-layer model, MPI/OpenMP, numerical solution, parallel algorithm.

References

1. Saint-Venant A.J.B. Theorie du Mouvement non permanent des Eaux // Institut de France, Acad. des Sci. de Paris. 1871. 73 (3) 147; 73 (4) 237.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika [Theoretical physics]. T. 4. Gidrodinamika. Nauka, Moscow 1988. 736 c.
3. Hendershott M.C. Long waves and ocean tides. Ch. 10 // Evolution of Physical Oceanography: Scientific Surveys in Honor of Henry Stommel / Eds. B.A. Warren, C. Wunsch. Cambridge: MIT Press, 1981. P. 292–341.
4. Shokin Y.I., Chubarov L.B. Finite-difference simulation of tsunami propagation // Theoretical and experimental fluid mechanics / Eds. U. Muller et al. Berlin: Springer, 1980. P. 599–606.
5. Karabut P. E., Ostapenko V. V. Zadacha o razrushenii plotiny v dvukhsloynoy melkoy vode (lineynoe priblizhenie)[The problem of the destruction of the dam in a two-layer shallow water (Linear approximation)]// Ppikl. matematika i mekhanika. 2009. T. 72, vyp. 6. S. 958–970.
6. Чикин А.Л., Крукиер Л.А. Численное исследование поведения некоторых разностных схем при решении уравнений мелкой воды.// Вычислительные технологии, Новосибирск, 1995, т. 4, №10, с. 300 – 311.
7. Cherevko A.A., Chupakhin A.P. Uravneniya modeli melkoy vody na vrashchayushcheysya prityagivayushchey sfere 1. Vyvod i obshchie svoystva [The equations of shallow water model on a rotating attracting sphere 1. Conclusion and general properties]// PMTF. 2009. T. 50, №2. S. 37-45
8. Han E., Warnecke G. The Exact Riemann solutions to shallow water equations . / URL: <http://www.math.ntnu.no/conservation/2012/012.pdf>
9. Ovsyannikov L. V. Modeli dvukhsloynoy “melkoy vody” [Two-layer "shallow water" models] // PMTF. 1979. № 2. S. 3–14.
10. Stanislav Brand Parallel algorithm for numerical solution of the shallow water equation // Proceedings of the Czech–Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 Czech Technical University in Prague, September 14-17, 2006 pp. 25–36

11. E.D. Karepova, V. V. Shaydurov Parallel'naya realizatsiya metoda konechnykh elementov dlya nachal'no-kraevoy zadachi melkoy vody [Parallel realization of the finite volume method for the initial-boundary shallow water problem] // Vychislitel'nye tekhnologii Tom 14, № 6, 2009
12. V.V. Kalmykov, R.A. Ibraev Algoritm s perekryiyami dlya resheniya sistemy uravneniy melkoy vody na parallel'nykh komp'yuterakh s raspredelennoy pamyat'yu [Algorithm with overlay for solving shallow water equations system on parallel computer with distributed memory]// UGATU, 2013 T. 17, № 5 (58). S. 252–259