Решение задачи двухфазного течения жидкости в пластах со скважинами с использованием методов декомпозиции

А.В. Цепаев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук

Работа посвящена методам решения задач двухфазного течения жидкости в пластах со скважинами. Предполагается, что в областях с высокими скоростями фильтрации закон Дарси нарушается и используется нелинейный закон Форхгеймера. Предложены методы для решения задач двухфазного течения в пористых средах с нелинейным законом фильтрации, основанные на методах декомпозиции. Расчеты проведены на гетерогенных вычислительных системах.

Ключевые слова: многофазные течения, методы декомпозиции, гетерогенные вычислительные системы.

1. Введение

Исследование процессов разработки месторождений углеводородного сырья с использованием математических моделей течений многофазной жидкости в пористых средах является актуальной задачей. Математические модели таких процессов представляют собой системы связанных нелинейных нестационарных уравнений с частными производными [1, 2]. Важным соотношением в этих уравнениях является закон фильтрации – связь между скоростью фильтрации и давлением. Большинство фильтрационных течений описывается законом фильтрации Дарси, который выражает линейную зависимость между скоростью и градиентом давления. Проверке и исследованию пределов применимости закона Дарси посвящено значительное число работ. В процессе этих исследований показано, что существует две основные причины отклонения от закона Дарси: отклонения, связанные с проявлением инерционных сил при высоких скоростях фильтрации (верхняя граница применимости закона Дарси); отклонения при достаточно малых скоростях фильтрации, вызванные проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с твердым скелетом пористой среды (нижняя граница применимости закона Дарси). В данной работе рассмотрен первый случай, связанный с проявлением инерционных сил. Поставленная задача решалась методами декомпозиции на гетерогенных вычислительных системах.

2. Постановка задачи двухфазной фильтрации с нелинейным законом

Будем считать пласт D напорным, ограниченным. Фильтрационное течение, в случае нарушения закона Дарси, подчиняется нелинейному закону Форхгеймера [3]:

$$\boldsymbol{q}_\alpha = -(1/(A_\alpha + Bq_\alpha))\operatorname{grad} p,$$

где $\alpha = \{o, w\}$ - индекс, соответствующий нефти или воде, $A_\alpha = 1/K_\alpha$, $K_\alpha = K_\alpha(S_\alpha) = k\, f_\alpha / \mu_\alpha$ - фазовые проницаемости, $f_\alpha = f_\alpha(S_\alpha)$ - относительные фазовые проницаемости, k – абсолютная проницаемость, μ_α - динамические вязкости фаз, q_α - модуль вектора скорости фильтрации $\boldsymbol{q}_\alpha$, B - константа пористой среды. Для области решения D введем следующие обозначения: $\overline{D} = \overline{D}_0 \cup (\bigcup_{l=1}^{N} \overline{D}_l)$, $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\overline{D}_0 \cap \overline{D}_l = \gamma_l$, где D_0 - внескважинная область, D_l - прискважинные подобласти. Требуется определить поле давления p и поле насыщенности S_w из системы уравнений

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{q}_\mathrm{o} + \boldsymbol{q}_\mathrm{w}) = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{q}_\alpha = -(1/(A_\alpha + Bq_\alpha))\mathrm{grad}\ p \text{ в } G_{l\alpha},\ l = 1,..., N,\ (\alpha = o, w), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{q}_\alpha = \mathrm{K}_\alpha \mathrm{grad}\ p \text{ в } D \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{N} G_{l\alpha} \right),\ (\alpha = o, w), \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{q}_\mathrm{w}) + m\partial S_w / \partial t = 0, \tag{4}$$

при граничных условиях

$$p = p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1, \tag{5}$$

$$-(K_o + K_w)\partial p / \partial n = q_{\Gamma n} \text{ на } \Gamma_2, \tag{6}$$

$$p|_{\partial V_l} = P_l,\ l = 1,..., N, \tag{7}$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3,\ S_w = S_{w_l},\ l = 1,..., M, \tag{8}$$

и начальных условиях

$$S_w = S_w^0 \text{ в } D, \tag{9}$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ - внешняя граничная поверхность области D, Γ_3 - часть поверхности Γ, через которую жидкость поступает в пласт, ∂V_k - поверхность интервала вскрытия l-ой скважины, P_l - заданное давление на l-ой скважине, p_Γ - заданное давление на границе Γ_1, $G_{l\alpha} = \{x \in D_l \mid \mathrm{Re}(q_\alpha) > \mathrm{Re}_{cr}\}$ - области выполнения нелинейного закона фильтрации, $q_{\Gamma n}$ - заданное значение нормальной составляющей скорости фильтрации на границе Γ_2, N - число скважин, M – число нагнетающих скважин ($M < N$), S_{w_l} - заданная насыщенность в нагнетательной скважине. Границы областей $G_{l\alpha}$ заранее неизвестны и должны определяться в процессе решения. В постановке задачи $G_{l\alpha} \subset D_l$. Если область выполнения нелинейного закона $G_{l\alpha}$ выходит за прискважинную подобласть, то она может быть расширена вплоть до их общих границ. Задачу будем решать численно с заданной погрешностью ε на сетке, сгущающейся к интервалам вскрытия скважин.

Пласт D представляется многосвязной областью, внутренние поверхности которой определены поверхностями скважин в интервалах вскрытия пласта.

3. Алгоритмы решения задачи

На каждом временном шаге решаются системы уравнений по определению поля давления p, и поля насыщенности S_w. Решение нелинейной задачи (1)-(3) с граничными условиями (5)-(7) по определению поля давления сведем к итерационному решению линейных задач. На первой итерации функция p^1 определяется из решения системы

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{q}_\mathrm{o} + \boldsymbol{q}_\mathrm{w}) = 0 \text{ в } D,$$

$$\boldsymbol{q}_\alpha = \mathrm{K}_\alpha \mathrm{grad}\ p^1 \text{ в } D,\ \alpha = o, w,$$

с условиями (5)-(7). Далее модуль вектора скорости фильтрации q_α^1 на каждом элементе вычисляется по формуле

$$q_\alpha^1 = |\mathrm{K}_\alpha \mathrm{grad}\ p^1|.$$

Подобласти $G_{l\alpha}^1 \subset D_l$ определяются теми элементами, на которых выполнено условие $\mathrm{Re}(q_\alpha^1) > \mathrm{Re}_{cr}$. Пусть известны функции p^i, q_α^i и подобласти $G_{l\alpha}^i$. Функция p^{i+1} определяется из решения уравнения:

$$\mathrm{div}((T_o^i + T_w^i)\mathrm{grad}\, p^{i+1}) = 0 \text{ в } D, \tag{10}$$

с условиями (5)-(7), где $T_\alpha^i = K_\alpha$ на элементах из области $D \setminus (\bigcup_{l=1}^{N} G_{l\alpha}^i)$ и $T_\alpha^i = -(1/(A_\alpha + Bq_\alpha^i))$ на элементах из областей $G_{l\alpha}^i$. Модуль вектора скорости фильтрации q_α^{i+1} определяется равенством

$$q_\alpha^{i+1} = \left| K_\alpha \operatorname{grad} p^{i+1} \right|$$

в области $D \setminus (\bigcup_{l=1}^{N} G_{l\alpha}^i)$, а на элементах сетки областей $G_{l\alpha}^i$ определяется из выполнения соотношения

$$\left| \operatorname{grad} p^{i+1} \right| = (A_\alpha + Bq_\alpha^{i+1}) q_\alpha^{i+1}.$$

Подобласти $G_{l\alpha}^{i+1}$ определяются теми элементами, на которых выполнено условие $\mathrm{Re}(q_\alpha^{i+1}) > \mathrm{Re}_{cr}$. Система уравнений (1)-(3) с условиями (5)-(7) считается решенной, если система (10) с условиями (5)-(7) решена с заданной погрешностью ε и $G_{l\alpha}^{i+1} = G_{l\alpha}^i$.

Решение системы уравнений (4), (8)-(9) по определению поля насыщенности S_w находится численно. Аппроксимация системы проводится методом контрольных объемов с неявной схемой по времени “вверх по потоку”.

При решении задачи двухфазной фильтрации жидкости без учета высоких скоростей фильтрации в [4] использовались два различных метода декомпозиции. Метод декомпозиции области по давлению основан на независимом решении систем алгебраических уравнений для сгущающихся участков сетки в подобластях и новом типе согласования этих решений с решением на последовательности более грубых сеток. Новый тип согласования заключается в представлении решения в подобластях сгущения сетки в виде суммы двух решений. Для учета высоких скоростей фильтрации в предложенном методе декомпозиции каждую систему для сгущающихся участков сетки необходимо решать по алгоритму, описанному выше. Для решения уравнения по насыщенности создан новый метод декомпозиции области, основанный на сочетании элементов явной и неявной схем. Декомпозиция явных схем не представляет трудностей, но при измельчении размера ячеек требуется маленький шаг по времени, что приводит к большим вычислительным затратам. Декомпозиция неявных схем требует использования предиктор-корректор процедуры. В предлагаемом методе на каждом временном шаге сеточные уравнения по насыщенности для сгущающихся участков решаются независимо по неявной схеме. Согласование полученных решений с решением на грубой сетке достигается за счет сочетания элементов явной и неявной схем в определении насыщенности для ячеек, окружающих сгущающиеся участки, без использования предиктор-корректор процедуры.

4. Численные эксперименты

Предложенные алгоритмы тестировались при решении модельной трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкостей с различным числом вертикальных добывающих и нагнетающих скважин. Рассматривался десятислойный пласт ($\approx$1км$\times$1км$\times$0,018км) с толщинами слоев d_1 = 1 м, d_2 = 1 м, d_3 = 3 м, d_4 = 1 м, d_5 = 1 м, d_6 = 1 м, d_7 = 2 м, d_8 = 1 м, d_9 = 2 м, d_{10} = 5 м и абсолютными проницаемостями $k_1 = 10^{-3}$ дарси, $k_2 = 10^{-2}$ дарси, $k_3 = 25\times10^{-3}$ дарси, $k_4 = 10^{-2}$ дарси, $k_5 = 10^{-3}$ дарси, $k_6 = 10^{-2}$ дарси, $k_7 = 5\times10^{-2}$ дарси, $k_8 = 10^{-2}$ дарси, $k_9 = 10^{-3}$ дарси, $k_{10} = 15\times10^{-3}$ дарси соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта задавалось давление P_Γ = 125 атм, на скважинах $P_к$= 30 атм, на боковой поверхности насыщенность $S_w = 0$, на подошве $S_w = 1$. Начальная насыщенность $S_w = 0$. Динамическая вязкость воды - $\mu_w = 1 \text{мПа} \cdot \text{с}$, динамическая вязкость нефти - $\mu_o = 15 \text{мПа} \cdot \text{с}$, плотность нефти $\rho_o = 0.882 \text{г/см}^3$, плотность воды $\rho_w = 1 \text{г/см}^3$. Относительные фазовые проницаемости брались линейными функциями от насыщенностей. Каждый интервал вскрытия моделировался круговым цилиндром с радиусом основания r =0,1 м и замыкался сверху и снизу сферическими поверхностями радиуса r =0,1 м. Таким образом, для каждой точки поверхности интервалов вскрытия вектор нормали определен однозначно.

Из-за отсутствия экспериментальных данных значения константы B выбирались из условия близости модулей скоростей фильтрации q_α, вычисленных с использованием законов Дарси и закона Форхгеймера в области перехода от линейного закона к нелинейному. Для вычисления чисел Рейнольдса использовалась формула Ф.И. Котяхова, Г.Ф. Требина [3]

$$\mathrm{Re}(q) = 4 \cdot \sqrt{2\kappa} \cdot q \cdot \rho / (m^{1,5} \cdot \mu),$$

где $\kappa = k \cdot \mu / (\rho \cdot g)$, μ - коэффициент вязкости, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, m - пористость. Для различных пористых сред Re_{cr} согласно [3] лежит в пределах 0,0085 – 3,4.

Рассматривалось два типа решений: решение системы без декомпозиции области и решение с декомпозицией области. Как ранее отмечалось, коэффициент B выбирался таким образом, чтобы скорости, вычисленные с использованием законов Дарси и Форхгеймера, были близки на границе перехода от линейного закона к нелинейному. Численные эксперименты проводились в случаях, когда эти скорости отличались на 1%, 0,1%, 0,01%. Для каждого из этих случаев в табл. 1 приведены значения коэффициента B, при которых проводилось численное тестирование.

Таблица 1. Значения коэффициента B .

$\Delta\ q$ (%)	Re_{cr} =0.3	Re_{cr} =0.01
1%	$2{,}07 \cdot 10^{-5}$	$6{,}22 \cdot 10^{-4}$
0,1%	$2{,}05 \cdot 10^{-6}$	$6{,}17 \cdot 10^{-5}$
0,01%	$2{,}05 \cdot 10^{-7}$	$6{,}16 \cdot 10^{-6}$

В табл. 2 приведено время решения задач с различным числом скважин методами без декомпозиции и с декомпозицией с числом Рейнольдса Re_{cr} = 0,3. Результаты решения показали превосходство во времени скорости решения методов декомпозиции по сравнению с методами без декомпозиции.

Таблица 2. Время решения задачи без декомпозиции и с декомпозицией.

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Время решения без декомпозиции	Время решения с декомпозицией
1	11744	7 мин	6 мин
50	365524	301 мин	147 мин
100	726721	722 мин	523 мин

Предложенные алгоритмы тестировались на кластере, состоящем из двух 4-ядерных вычислительных узлов с процессорами Intel Core i7 2600, и оборудованным графическими ускорителями компании NVidia GTX 560 TI, при решении модельной трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкости с вертикальными добывающими и нагнетающими скважинами. Каждая прискважинная зона содержала около 25000 узлов, внескважинная зона около 6000 узлов. Общее число узлов для 200 сгущающихся участков достигало $5 \cdot 10^6$. Системы линейных уравнений для определения поля давления решались методом сопряженных градиентов [5] с полиномиальным предобуславливанием. Системы нелинейных уравнений для определения поля насыщенности прискважинной зоны решались по неявной схеме методом Ньютона [6]. Алгоритмы распараллелены с помощью MPI процессов, OpenMP и CUDA технологий. Использовался язык C++ и среда разработки приложений Visual Studio 2008. Распараллеливание на процессоры проводилось с помощью библиотеки MPICH2 для windows 7. При решении на GPU устройствах использовались алгоритмы стандартной библиотеки CUBLAS, а также собственные алгоритмы для построения систем уравнений на GPU устройствах. При решении задачи для каждого MPI процесса выделяется равное число сгущающихся участков сетки. Для решения задач на сгущающихся участках, соответствующих одному MPI процессу, порождаются потоки с помощью технологии OpenMP, которые распределяют эти задачи на ядра процессора и на графические устройства. При этом задачи распределяются динамически, то есть по мере их решения. Задача решалась на двух вычислительных узлах с общим числом ядер 8(4 ядра на узел) и 2-мя GPU ускорителями. Задачи запускались в режиме один MPI процесс на один узел, каждому MPI процессу соответствовало одно GPU устройство. Рассматривались следующие варианты запуска задач:

1. На всех доступных ядрах с использованием одного MPI процесса и без использования GPU ускорителей.

2. На двух ядрах с использованием двух MPI процессов и двух GPU устройств. В этом случае каждому MPI процессу соответствовало одно GPU устройство и одно ядро.

3. На всех доступных ядрах с использованием MPI процессов и GPU устройств. В этом случае использовались все доступные ресурсы кластера(2 GPU устройства и 8 ядер).

В табл. 3 - 5 приведены результаты решения. Введено условное обозначение "MPI/OpenMP/GPU", которое обозначает количество используемых "процессов/нитей/ускорителей". Сравнение проводилось с решением задачи на одном ядре без использования GPU устройств.

Таблица 3. Вариант 1.

Количество ядер	1("1/1/0")	2("1/2/0")	3("1/3/0")	4("1/4/0")
Ускорение	1	1,7	2,1	2,9

Таблица 4. Вариант 2.

Количество GPU устройств	1("1/1/1")	2("2/2/2")
Ускорение	17,3	30,1

Таблица 5. Вариант 3.

Количество GPU устройств	1("2/8/1")	2("2/8/2")
Ускорение	20,2	36,3

В табл. 3 показано ускорение времени решения задачи, при использовании ядер только одного вычислительного узла. Эффективность работы варианта 1 при использовании нитей достигает 72%. Эффективность работы варианта 2 при использовании GPU устройств рассчитывается из табл. 4 и достигает 80%.

5. Заключение

Построены алгоритмы для решения задачи двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками, основанные на методах декомпозиции. В случае высоких скоростей фильтрации (числа Рейнольдса больше критического значения) применялся нелинейный закон Форхгеймера. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи на гетерогенных вычислительных системах. Показана высокая эффективность использования многопроцессорных систем, построенных на базе графических процессоров.

Литература

1. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. SIAM, 2006. 549 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
3. Басниев К. С., Власов А.М., Кочина И.М., Максимов В.М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.
4. Мазуров П.А., Цепаев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками // Вычислительные методы и программирование. 2006, Т.7, №2, С. 115–123.

5. Larabi A, De Smedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. - 1994. - Vol.30. - No.2. - P.509-521.
6. Самарский А.А. Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

The solution two-phase flow equations in three - dimension reservoirs using decomposition methods

A.V. Tsepaev

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center,
Russian Academy of Sciences

The work is devoted to methods of solving two-phase fluid flow problems in reservoirs. It is assumed that in domain with high rates of filtration Darcy's law is violated and used a non-linear law. The methods for solving two-phase flow problems in porous media with a nonlinear filtration law based on decomposition methods. The proposed methods are implemented on heterogeneous computing systems.

Key words: multiphase flow, decomposition methods, high performance computing.

References

1. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. SIAM, 2006. 549 c.
2. Aziz K., Settary Petroleum reservoir simulation. Applied science publishers ltd, London.
3. Basniev K. S., Vlasov A.M., Kochina I.M., Maksimov V.M. Podzemnaya gidravlika. M.: Nedra, 1986. 303 s.
4. Mazurov P.A., Tsepaev A.V. Algoritmy dlya rasparallelivaniya resheniya zadach dvukhfaznoy fil'tratsii zhidkosti na setkakh so sgushchayushchimisya uchastkami // Vychislitel'nye metody i programmirovanie. 2006, T.7, №2, S. 115–123.
5. Larabi A, De Smedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. - 1994. - Vol.30. - No.2. - P.509-521.
6. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. M.: Nauka, 1989. 432 s.